К. Б. Сабитов

Институт прикладных исследований Академии наук РБ,

г. Стерлитамак,

sabitov_fmf@mail.ru

ЛЕКЦИЯ: ПРИНЦИПЫ ЭКСТРЕМУМА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Интерес к принципам экстремума решений дифференциальных уравнений объясняется тем, что, во-первых, из них следует единственность и устойчивость решений краевых задач, а в свою очередь теорема единственности играет решающую роль при доказательстве существования решения краевой задачи методом интегральных уравнений. Во-вторых, они позволяют построить альтернирующий процесс типа Шварца для обоснования существования решения краевой задачи при довольно общих предположениях относительно данных задачи. В-третьих, принципы экстремума находят применение при построении спектральной теории краевых задач и установлении качественных свойств решений дифференциальных уравнений.

§1. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка

Рассмотрим в начале простейшее дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$Lu \equiv u''(x) = 0, \quad x \in (a, b), \tag{1}$$

где $u(x)$ — неизвестная функция одной переменной x. Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x) = \alpha x + \beta, \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Решение (2) на концах сегмента $[a,b]$ достигает своих наибольшего и наименьшего значений.

Если $\alpha \neq 0$, то $\max\limits_{x\in[a,b]} u$ и $\min\limits_{x\in[a,b]} u$ достигаются только на границе сегмента $[a,b]$ (см. рис. 1). Если $\alpha = 0$, то $u(x) \equiv \equiv \mathrm{const} = \beta$ и $\max\limits_{x\in[a,b]} u = \min\limits_{x\in[a,b]} u = \beta$, и эти значения также достигаются на концах $[a,b]$.

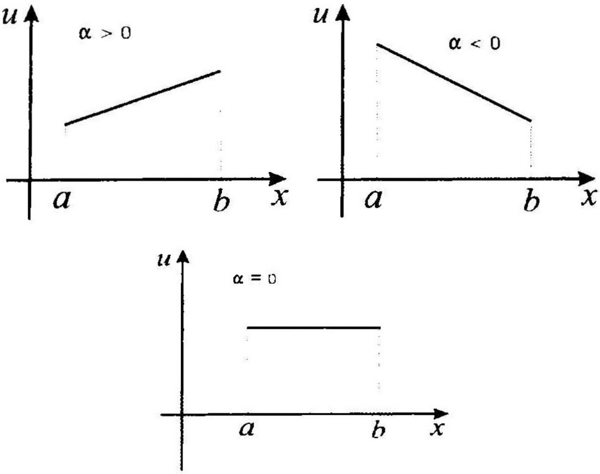

Рис. 1

Заметим, что

$$\text{при } \alpha > 0: \ u'(a+0) < 0, \ u'(b-0) > 0;$$

$$\text{при } \alpha < 0: \ u'(a+0) > 0, \ u'(b-0) < 0.$$

Теперь рассмотрим общее линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$Lu \equiv u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u = f(x), \ a < x < b, \qquad (3)$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – заданные на $[a,b]$ непрерывные функции.

Теорема 1 (Внутренний принцип экстремума).

I. Если всюду на (a, b)

$$q(x) < 0 \qquad \text{и} \qquad f(x) \geqslant 0 \quad (f(x) \leqslant 0) \tag{4}$$

или

$$q(x) \leqslant 0 \qquad \text{и} \qquad f(x) > 0 \quad (f(x) < 0), \tag{5}$$

то любое решение $u(x)$ *уравнения (3) не может иметь на* (a, b) *точек положительного (отрицательного) локального максимума (минимума).*

II. Если всюду на (a, b)

$$q(x) \leqslant 0 \qquad \text{и} \qquad f(x) \geqslant 0 \quad (f(x) \leqslant 0), \tag{6}$$

то любое решение $u(x)$ *уравнения (3) на* (a, b) *не может иметь точек положительного (отрицательного) локального максимума (минимума), когда оно не обращается в постоянную на* (a, b).

Если в обоих случаях решение $u(x)$ *непрерывно на* $[a, b]$, *то наибольшее (наименьшее) положительное (отрицательное) на* $[a, b]$ *значение* $u(x)$ *достигается только на концах этого сегмента.*

Отметим, что во второй части теоремы 1 условия (4) и (5) объединены в условия (6), но при этом появляется дополнительное условие, что решение уравнения (3) не обращается в постоянную на интервале (a, b).

Теорема 2 (Граничный принцип экстремума). *Пусть:*

1) $q(x) \leqslant 0$ *и* $f(x) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *на* (a, b);

2) $u(x)$ — *отличное от постоянной решение уравнения (3) из класса* $C^1[a, b]$;

3) $\max\limits_{[a,b]} u(x) = u(x_0) > 0$ $\left(\min\limits_{[a,b]} u(x) = u(x_0) < 0\right)$.

Тогда $u'(b-0) > 0$ (< 0), *если* $x_0 = b$ *и* $u'(a+0) < 0$ (> 0), *если* $x_0 = a$.

Доказательство теорем 1 и 2 приводится в [1, гл. 3, §10].

Теперь покажем применение теорем 1 и 2 на следующем примере.

Пример 1. Пусть в классе $C^1[a,b]$ существует решение $u(x)$ уравнения (3), где $q(x) \leqslant 0$ и $q(x) \neq 0$, удовлетворяющее одному из граничных условий:

а) $u(a) = u_0$, $u(b) = u_1$ (первая граничная задача);

б) $u'(a) = u_0$, $u'(b) = u_1$ (вторая граничная задача);

в) $\alpha_1 u(a) - \beta_1 u'(a) = u_0$, $\alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = u_1$ (третья граничная задача), где α_i, β_i – заданные действительные числа одного знака, $i = 1, 2$, u_0, u_1 – заданные действительные числа. Доказать, что такое решение единственно.

Решение. Пусть существует два решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ уравнения (3), удовлетворяющих одним и тем же граничным условиям на концах $[a,b]$. Рассмотрим их разность $u_1(x) - u_2(x) = u(x)$, которая удовлетворяет однородному уравнения $L(u) = 0$ и нулевым граничным условиям (т. е. $u_0 = u_1 = 0$, $f(x) \equiv 0$).

Докажем, что $u(x) \equiv 0$ на (a,b). Пусть $u(x) \not\equiv 0$ на (a,b), т. е. существует $x' \in (a,b)$, такая, что $u(x') \neq 0$. Пусть для определенности $u(x') > 0$. Тогда $\max\limits_{[a,b]} u(x) = u(x_0) > 0$, $x_0 \in [a,b]$. Поскольку $q(x) \leqslant 0$ и $f(x) \equiv 0$ на (a,b), то в силу теоремы 1 значение $u(x_0)$ достигается только на концах сегмента $[a,b]$, т. е. в точках a и b при условии, что $u(x) \neq \mathrm{const}$.

В случае а) $u(x_0) = u(a) = 0$ или $u(x_0) = u(b) = 0$, чего быть не может. Следовательно, $u(x) \equiv \mathrm{const} = C_0$ на $[a,b]$. По условию функция $u(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $u(a) = u(b) = 0$, тогда $u(x) \equiv C_0 = 0$.

Пусть выполнены условия б). В этом случае в силу теоремы 2 $u'(a+0) < 0$ при $x_0 = a$ или $u'(b-0) > 0$ при $x_0 = b$, которые противоречат условию $u'(a) = u'(b) = 0$. Тогда $u(x) \equiv \text{const} = C_0$. Подставив $u(x) \equiv C_0$ в уравнение (3) (где $f(x) \equiv 0$), получим $q(x) \cdot C_0 \equiv 0$. Отсюда следует, что $C_0 = 0$, так как $q(x) \not\equiv 0$ на (a, b).

Пусть выполнены условия в). Тогда, если $x_0 = a$, то $u'(a) = u(a)\alpha_1/\beta_1 > 0$, что в силу теоремы 2 противоречит $u'(a) < 0$; если же $x_0 = b$, то $u'(b) = -u(b)\alpha_2/\beta_2 < 0$, которое несовместимо с неравенством $u'(b) > 0$.

Таким образом, во всех трех случаях $u(x) \equiv 0$ на (a, b). Отсюда в силу непрерывности $u(x)$ на $[a, b]$ следует, что $u(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

Отметим, что в случае б), если $q(x) \equiv 0$ на (a, b), то $u(x) \equiv \text{const}$ на $[a, b]$.

На студенческих олимпиадах по математике предлагались следующие примеры.

Пример 2. Пусть $y(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, $y(0) = y(1) = 0$, $y'' = e^x y$; доказать, что $y(x) \equiv 0$.

Пример 3. Доказать, что задача $y'' - x^2 y = 0$, $-1 < x < 1$, $y(-1) = y(1) = 0$, имеет только нулевое решение.

§2. Уравнение Лапласа. Гармонические функции

Рассмотрим уравнение Лапласа

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = 0 \tag{7}$$

в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$ (см. рис. 2) точек $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $n \geqslant 2$.

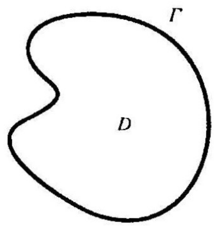

Рис. 2

Определение 1. Функция $u(x)$ называется гармонической в D, если $u(x) \in C^2(D)$ и $\triangle u(x) \equiv 0$ в D.

Теорема 3 (Внутренний принцип экстремума). *Если функция $u(x)$ является гармонической в ограниченной области D, непрерывной на замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$ и отличной от постоянной, то наибольшее и наименьшее значения этой функции по $\overline{D}$ не могут достигаться внутри области D, т. е. эти значения достигаются только на границе* Γ.

Следствие 1. *Если функция $u(x)$ является гармонической в области D, непрерывной в замкнутой области $\overline{D}$ и наибольшее (наименьшее) значение по $\overline{D}$ достигает внутри области D, то она постоянна в $\overline{D}$.*

Следствие 2. *Если функция $u(x)$ является гармонической в области D, непрерывной на $\overline{D}$ и $u(x) \geqslant 0$ на Γ, то $u(x) \geqslant 0$ в $\overline{D}$.*

Следствие 3 (Свойство сравнения). *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ являются гармоническими в области D, непрерывными на $\overline{D}$ и $u \geqslant v$ на Γ, то $u \geqslant v$ в D.*

Следствие 4. *Если функция $u(x)$ является гармонической в D и непрерывной на замкнутой области $\overline{D}$, то при любых $x \in \overline{D}$ справедливы оценки:*

а) $\min\limits_{\Gamma} u(x) \leqslant u(x) \leqslant \max\limits_{\Gamma} u(x)$; *б)* $|u(x)| \leqslant \max\limits_{\Gamma} |u(x)|$.

Следствие 5. *Если последовательность гармонических в области D и непрерывных в замкнутой области $\overline{D}$ функций сходится равномерно на границе Γ области D, то эта последовательность равномерно сходится и во всей замкнутой области $\overline{D}$.*

Теорема 4 (Граничный принцип экстремума Зарембы [2]). *Пусть:*

1) функция $u(x)$ является гармонической в D, непрерывной на замкнутой области $\overline{D}$ и отличной от постоянной;

2) граница Γ области D удовлетворяет условию строгой сферичности изнутри [1]

3) $\max\limits_{\overline{D}} u(x) = u(x_0)$, $(\min\limits_{\overline{D}} u(x) = u(x_0))$, $x_0 \in \Gamma$.

Тогда, если в точке $x = x_0$ существует производная по внешней нормали N к границе Γ области D, то

$$\frac{\partial u}{\partial N}\bigg|_{x=x_0} > 0 \quad (< 0).$$

Доказательство теорем 3 и 4 приводится в [3, с. 126 – 131; с. 149 – 153].

Рассмотрим две известные классические задачи.

Задача Дирихле. *Найти в области D решение $u(x)$ уравнения (7), непрерывное в $\overline{D}$ и удовлетворяющее граничному условию*

$$u(x)|_\Gamma = f(x), \quad x \in \Gamma, \tag{8}$$

где f — заданная, по крайней мере, непрерывная функция.

[1] Граница Γ области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, удовлетворяет условию строгой сферичности изнутри, если для каждой точки $y \in \Gamma$ можно коснуться шаром B, целиком лежащим в D, т. е. существует шар B, такой, что $\overline{B} \cap \Gamma = \{y\}$, $B \subset D$. Данное геометрическое условие выполняется, если поверхность $\Gamma \in C^2$.

Теорема 5. *Если существует решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа, т. е. задачи (7), (8), то оно единственно и устойчиво.*

Доказательство. Допустим, что существует две функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$, удовлетворяющих всем условиям задачи Дирихле. Рассмотрим разность этих функций $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$. Функция $u(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $u(x) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$;

2) $\Delta u(x) = \Delta(u_1(x) - u_2(x)) = \Delta u_1(x) - \Delta u_2(x) \equiv 0$ в D;

3) $u(x)|_\Gamma = [u_1(x) - u_2(x)]|_\Gamma = u_1(x)|_\Gamma - u_2(x)|_\Gamma = f(x) - f(x) \equiv 0$.

Значит, функция $u(x)$ является гармонической в области D, непрерывной в замкнутой области $\overline{D}$ и $u(x)|_\Gamma = 0$. По доказанному выше принципу экстремума, $\max\limits_{\overline{D}} u$ и $\min\limits_{\overline{D}} u$ достигаются на границе Γ, а на Γ функция $u(x) = 0$. Тогда $u(x) \equiv 0$ в $\overline{D}$, т. е. $u_1(x) = u_2(x)$.

Пусть $u_1(x)$ – решение задачи (7), (8) при граничной функции $f_1(x)$, а $u_2(x)$ – решение задачи (7), (8) при функции $f_2(x)$. Тогда разность $u_1(x) - u_2(x)$ является решением задачи (7), (8) с граничной функцией $f_1(x) - f_2(x)$. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ и при всяком $x \in \Gamma$ справедливо неравенство $|f_1(x) - f_2(x)| < \varepsilon$. Тогда в силу следствия 4 для разности $u_1(x) - u_2(x)$ справедлива оценка

$$|u_1(x) - u_2(x)| \leqslant \max_\Gamma |u_1(x) - u_2(x)| = \max_\Gamma |f_1(x) - f_2(x)| < \varepsilon.$$

А это означает устойчивость решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Задача Неймана. *Найти в области D решение $u(x)$ уравнения (7) из класса $C^1(\overline{D})$, удовлетворяющее гранично-*

му условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\Gamma} = g(x), \tag{9}$$

где $g(x)$ — *заданная, по крайней мере, непрерывная функция.*

Теорема 6. *Если существует решение задачи Неймана, т. е. задачи (7) и (9), то оно определяется с точностью до постоянного слагаемого.*

Доказательство. Пусть существует два решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ задачи Неймана. Рассмотрим их разность $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$, которая принадлежит классу $C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$, является гармонической в области D и на Γ удовлетворяет однородному граничному условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\Gamma} = \left.\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial N}\right|_{\Gamma} = \left.\frac{\partial u_1}{\partial N}\right|_{\Gamma} - \left.\frac{\partial u_2}{\partial N}\right|_{\Gamma} = g(x) - g(x) = 0.$$

Пусть функция $u(x)$ тождественно не равна постоянной в области D. Поскольку $u(x) \in C(\overline{D})$, то существуют точки $x_1, x_2 \in \overline{D}$, такие, что $u(x_1) = \max\limits_{\overline{D}} u(x)$, $u(x_2) = \min\limits_{\overline{D}} u(x)$. В силу строгого внутреннего принципа экстремума для гармонических функций $x_1, x_2 \notin D$ и $x_1, x_2 \in \Gamma$. На основании граничного принципа экстремума

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{x=x_1} > 0 \quad \text{и} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{x=x_2} < 0.$$

Последние неравенства противоречат граничному условию $\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\Gamma} = 0$. Следовательно, $u(x) \equiv \mathrm{const}$ в D, т. е. $u_1(x) = u_2(x) + \mathrm{const}$.

Рассмотрим примеры из студенческих олимпиад.

Пример 4. Пусть функция $u(x)$ является гармонической в области D, непрерывной в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$ и $u|_{\Gamma} = \mathrm{const}$. Тогда чему равна функция $u(x)$ внутри области D?

Пример 5. Пусть комплексная функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна на $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Доказать, что $f(z) \equiv$ $\equiv \text{const}$ в D, если $\text{Jm} f(z) = \text{const}$ или $\text{Re} f(z) = \text{const}$ на Γ.

§3. Линейные эллиптические уравнения общего вида

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных 2-го порядка

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x) \qquad (10)$$

в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с границей Γ, где $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ и $f(x)$ заданы и непрерывны в $\overline{D}$, при этом $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ для любого $x \in D$.

Пусть для любого $x \in D$ соответствующая квадратичная форма при любом $t = (t_1, t_2, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$Q(t_1, t_2, ..., t_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) t_i t_j > 0. \qquad (11)$$

Условие (11) означает, что уравнение (10) в области D является эллиптическим.

Теорема 7 (Внутренний принцип экстремума). *Пусть*

1) всюду в D

$$c(x) < 0 \quad \text{и} \quad f(x) \geqslant 0 \ \ (\leqslant 0) \qquad (12)$$

или

$$c(x) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad f(x) > 0 \ \ (< 0); \qquad (13)$$

2) $u(x) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ и $Lu \equiv f(x)$ в D.

Тогда функция $u(x)$ *ни в одной точке области* D *не может достигать положительного локального максимума (отрицательного локального минимума), следовательно, наибольшее в* $\overline{D}$ *положительное значение (наименьшее в* $\overline{D}$ *отрицательное значение) достигается только на границе* Γ *области* D.

Естественно возникает вопрос: нельзя ли объединить условия (12) и (13) в одно:

$$c(x) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad f(x) \geqslant 0 \quad (\leqslant 0).$$

Для этого введем понятие равномерной эллиптичности оператора L (см. (10)).

Определение 2. Уравнение (10) или оператор L *называется равномерно эллиптическим в области* D, если существуют положительные постоянные k_0 и k_1, такие, что для всех $x \in D$ выполняется оценка

$$k_0|t|^2 \leqslant Q(t_1, t_2, ..., t_n) \leqslant k_1|t|^2, \tag{14}$$

где $|t| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + ... + t_n^2}$ – расстояние от центра $\overline{0}$ до точки t пространства $\mathbb{R}^n$.

Уравнение Лапласа (7) во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ является равномерно эллиптическим, так как $Q(t_1, t_2, ..., t_n) = |t|^2$, и в оценке (14) в качестве k_0 и k_1 можно взять $k_0 = k_1 = 1$ или $k_0 = 1/2, \quad k_1 = 1$.

Определение 3. Под регулярным в области D решением уравнения (10) будем понимать функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям: $u(x) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ и $Lu(x) \equiv f(x)$ в D.

Теорема 8 (Принцип Хопфа – Олейник [4, 5]). *Пусть:*

1) оператор L *является равномерно эллиптическим в* D *и*

$$c(x) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad f(x) \geqslant 0 \quad (\leqslant 0) \quad \text{в } D;$$

2) $u(x)$ – регулярное в D решение уравнения (10).

Тогда функция $u(x)$ ни в одной точке области D не может достигать положительного локального максимума (отрицательного локального минимума), если она не обращается в постоянную в любой подобласти области D.

Теорема 9 (Граничный принцип Жиро – Олейник [6, 4]). *Пусть:*

1) выполнено условие 1) теоремы 8;

2) $u(x)$ – регулярное в D решение уравнения (10), непрерывное вплоть до границы области D со своими частными производными первого порядка и $u(x) \not\equiv \mathrm{const}$ в любой подобласти области D;

3) граница Gamma области D удовлетворяет условию строгой сферичности изнутри;

4) $\max\limits_{\overline{D}} u(x) = u(x_0) > 0$ $(\min\limits_{\overline{D}} u(x) = u(x_0) < 0)$, $x_0 \in$ $\in$ Gamma.

Тогда для любого направления l, исходящего из точки x_0 и удовлетворяющего условию $\cos(l, N) > 0$, имеет место неравенство

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial l} > 0 \quad (< 0).$$

Доказательство теорем 7 – 9 можно найти в работах самих авторов [4 – 6] или монографии [7, с. 28 – 32].

На основании теорем 7 – 9 можно доказать теоремы единственности решений задач Дирихле, Неймана и Пуанкаре для уравнения (10) в области D.

Естественно возникает вопрос о справедливости теоремы 9, когда не выполняется условие 3) этой теоремы.

Рассмотрим уравнение (10) в области D с угловой точкой y (см. рис. 3).

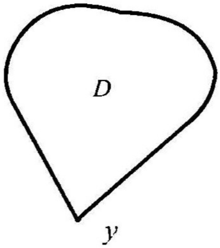

Рис. 3

Теорема 10 (Граничный принцип Надирашвили [8]). *Пусть: выполнены условия 1), 2) и 4) теоремы 9; граница* Γ *области* D *удовлетворяет условию конусности изнутри* [2]. *Тогда в любой окрестности* $\Omega \subset \Gamma$ *точки* x_0 *найдется точка* $x' \in \Omega$, *такая, что*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial v}\right|_{x=x'} > 0 \quad (< 0).$$

Теорема 11 [9]. *Пусть:*

1) выполнены все условия теоремы 10 за исключением того, что эллиптический оператор L *не обязательно является равномерно эллиптическим в* D *(т. е. уравнение (10) может быть вырождающимся в* $\overline{D}$*);*

2) $\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ix_i} \geqslant K \cdot c(x)$ *в* D*;*

3) на границе Γ *в проколотой окрестности угловой точки* y : $\sum\limits_{i=1}^{n} n_i b_i \leqslant 0$, *где* n_i *– компоненты вектора внешней нормали к* $\Gamma \setminus \{y\}$ *и* $K = \text{const} > 0$.

[2]Граница Γ удовлетворяет условию конусности изнутри, если существуют постоянные $h > 0$, $\alpha \in (0, 1/2)$ и непрерывное векторное поле $v(x)$ на Γ, такие, что для любой точки $y \in \Gamma$ конус с вершиной в точке y высоты h, углом раствора 2α и осью, направленной по $v(x)$ целиком, кроме вершины, лежит в D. В частности, условие конуса выполнено, когда $\Gamma \in C^1$, т. е. для областей с липшицевой границей Γ

Тогда справедливо заключение теоремы Надирашвили.

Если в уравнении (10) $b_i(x) \equiv 0$, то условия теоремы 11 всегда выполнены. Отметим также, что теорема 11 находит применение в теории вырождающихся уравнений смешанного типа.

Замечание 1. Аналоги теорем 7 – 9 получены для уравнений параболического типа, в частности, для уравнения теплопроводности [3, с. 180 – 183], [10].

§4. Принцип экстремума решений уравнений гиперболического типа

Рассмотрим уравнение гиперболического типа

$$L_0 u \equiv u_{\xi\eta} + a(\xi,\eta)u_\xi + b(\xi,\eta)u_\eta + c(\xi,\eta)u = f(\xi,\eta) \qquad (15)$$

в характеристическом треугольнике Δ (см. рис. 4), ограниченном отрезками прямых $\xi = 0$, $\eta = \xi$ и $\eta = l$.

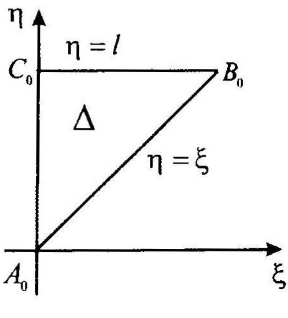

Рис. 4

Пусть $A_0 = (0,0)$, $B_0 = (l,l)$, $C_0 = (0,l)$ – вершины треугольника Δ; $\alpha(\xi,\eta) = a(\xi,\eta)\beta(\xi,\eta)$, $\beta(\xi,\eta) = \exp\int b(\xi,\eta)d\xi$, $h(\xi,\eta) = a_\xi(\xi,\eta) + a(\xi,\eta)b(\xi,\eta) - c(\xi,\eta)$.

Пусть функции $a(\xi,\eta)$, $a_\xi(\xi,\eta)$, $b(\xi,\eta)$ и $c(\xi,\eta)$ непрерывны в $\Delta \cup A_0C_0$ и при $(\xi,\eta) \in \Delta$ удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\begin{cases} h(\xi,\eta) \geqslant 0, \\ \alpha(0,\eta) + \int\limits_0^\xi \beta(t,\eta)c(t,\eta)dt > 0; \end{cases} \tag{16}$$

$$\alpha(\xi,\eta) - \int\limits_0^\xi \beta(t,\eta)|h(t,\eta)|dt > 0. \tag{17}$$

Отметим, что в условиях (16) и (17) интегральные неравенства могут быть нестрогими (т. е. $\geqslant 0$), но в этом случае на каждом отрезке $[0,\xi]$ характеристики $\eta = \text{const}$ множество точек, в которых $h(t,\eta) = 0$, имеет меру нуль.

Предполагается, что правая часть $f(\xi,\eta)$ интегрируема по ξ на каждом отрезке $[0,\xi_0]$ характеристики $\eta = \eta_0$, $0 < \xi_0 < \eta_0 < l$.

Определение 4. Регулярным решением уравнения (15) в области Δ назовем функцию $u(\xi,\eta)$, удовлетворяющую условиям:

1) $u \in C(\overline{\Delta}) \wedge C^1(\Delta)$, $u_{\xi\eta} \in C(\Delta)$, $L_0u \equiv f$ в Δ;

2) *производная* u_η *непрерывна на множестве* $\Delta \cup A_0C_0$.

Теорема 12 (Принцип экстремума). *Пусть:*

1) *коэффициенты уравнения* (15) *обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию* (16);

2) $f(\xi,\eta) \leqslant 0$ $(\geqslant 0)$ *в* Δ;

3) $u(\xi,\eta)$ *регулярное в* Δ *решение уравнения* (15), *равное нулю на характеристике* A_0C_0.

Тогда, если $\max\limits_{\overline{\Delta}} u(\xi,\eta) > 0$ $(\min\limits_{\overline{\Delta}} u(\xi,\eta) < 0)$, *то* $\max\limits_{\overline{\Delta}} u$ $(\min\limits_{\overline{\Delta}} u)$ *достигается на отрезке* $\overline{A_0B_0}$.

Теорема 13 (Принцип максимума модуля). *Пусть:*

1) *коэффициенты уравнения* (15) *обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию* (17);

2) $f(\xi, \eta) \equiv 0$ *в* Δ;

3) $u(\xi, \eta)$ – *регулярное решение уравнения* (15), *равное нулю на характеристике* $\overline{A_0C_0}$.

Тогда, если $\max\limits_{\overline{\Delta}} |u(\xi, \eta)| > 0$, *то он достигается на отрезке* $\overline{A_0B_0}$.

Доказательство теорем 12 и 13 приведены в работе [11].

Замечание 2. Принцип экстремума для уравнения (15) впервые был установлен в [12] при условиях: $u_\eta(0, \eta) \leqslant 0$ $(\geqslant 0)$, $u \in C^1(\overline{\Delta}) \cap C^2(\Delta)$, $L_0 u \leqslant 0$ $(\geqslant 0)$ в $\overline{\Delta} \setminus \overline{A_0B_0}$; a, a_ξ, b, $c \in C(\overline{\Delta})$; $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ в $\overline{\Delta}$.

§5. Принцип экстремума для уравнений смешанного типа

В теории уравнений смешанного типа первой граничной задачей является, так называемая, задача Трикоми по имени итальянского математика. Ф. Трикоми ставил свою задачу для уравнения

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Ф.И. Франкль впервые обнаружил весьма важные приложения задачи Трикоми для уравнения Чаплыгина

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

где $K(0) = 0$, $K'(y) > 0$, и других родственных ей задач в газовой динамике — в теории установившихся околозвуковых течений. Для простоты изложения здесь рассмотрим задачу

Трикоми для модельного уравнения смешанного типа

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} = 0,$$

которое для упрощения исследования граничных задач для уравнений смешанного типа было предложено М.А. Лаврентьевым. Детальное исследование задачи Трикоми и ее различных обобщений для данного уравнения провел А.В. Бицадзе.

Рассмотрим уравнение Лаврентьева – Бицадзе

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} = 0 \tag{18}$$

в области D, ограниченной кусочно-гладкой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$ и $B(1,0)$, и характеристиками $AC(x + y = 0)$ и $CB(x - y = 1)$ уравнения (18) при $y < 0$. (см. рис. 5).

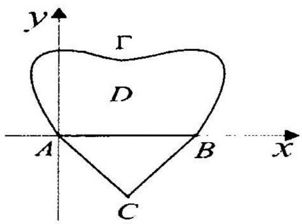

Рис. 5

Обозначим через $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Задача Трикоми (Задача Т). Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{19}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{20}$$

$$u(x,y)|_\Gamma = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma; \tag{21}$$

$$u(x,y)|_{AC} = u(x,-x) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \tag{22}$$

где $\varphi(x,y)$ и $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(0,0) = \psi(0)$.

Отметим, что из условия (19) следует, что

$$\lim_{y\to 0-0} u(x,y) = \lim_{y\to 0+0} u(x,y), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \tag{23}$$

$$\lim_{y\to 0-0} u_y(x,y) = \lim_{y\to 0+0} u_y(x,y), \quad 0 < x < 1 \tag{24}$$

или

$$u(x,0-0) = u(x,0+0) = \tau(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \tag{25}$$

$$u_y(x,0-0) = u_y(x,0+0) = \nu(x), \quad 0 < x < 1. \tag{26}$$

Условия (23) и (24) или (25) и (26) называются условиями склеивания или сопряжения. Линия $y = 0$ называется линией перехода или линией изменения типа уравнения (18). На этой линии не требуется выполнения уравнения (18).

Теорема 14 (Принцип экстремума А.В. Бицадзе [13]). *Если функция $u(x,y)$ удовлетворяет условиям (19), (20) и $u(x,y) = 0$ на характеристике AC, то $\max\limits_{\overline{D}} u(x,y)$ $(\min\limits_{\overline{D}} u(x,y))$ достигается на кривой $\overline{\Gamma}$.*

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ достигает глобального максимума по $\overline{D}$ в некоторой точке $Q \in \overline{D}$, т. е. $\max\limits_{\overline{D}} u(x,y) = u(Q)$, $Q \in \overline{D}$. Надо доказать, что $Q \in \Gamma$.

В области D_+ функция $u(x,y)$ является гармонической. Тогда в силу внутреннего принципа экстремума для гармонических функций точка $Q \notin D_+$, если $u(x,y) \not\equiv \text{const}$ в D_+, т. е. $Q \in \overline{\Gamma} \cup AB$. Пусть точка $Q \in AB$, тогда $Q = (x_0, 0)$, $0 < x_0 < 1$. В области D_- для уравнения (18), т. е. уравнения струны

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \tag{27}$$

рассмотрим задачу Дарбу с данными: $u(x, 0-0) = \tau(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; $u|_{AC} = u(x, -x) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1/2$, где $\tau(0) = 0$, $\tau(x)$ – заданная функция. Как известно, если $\tau(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, $\tau(0) = 0$, то решение задачи Дарбу для уравнения (27) определяется формулой

$$u(x,y) = \tau(x+y). \tag{28}$$

Отсюда видно, что (см. рис. 6)

$$\max_{\overline{D_-}} u(x,y) = \max_{\overline{AB}} u(x,y) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \tau(t).$$

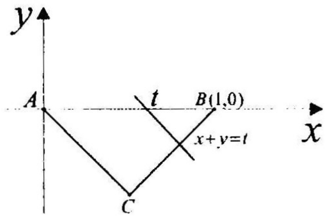

Рис. 6

Из формулы (28) вычислим $u_y(x, 0-0) = \tau'(x)$. Тогда в точке $(x_0, 0)$

$$u_y(x_0, 0-0) = \tau'(x_0) = 0. \tag{29}$$

С другой стороны, в силу граничного принципа экстремума для гармонических функций $u_y(x_0, 0+0) < 0$,что на основании равенства (26) противоречит (29). Следовательно, точка $Q \notin AB$, и остается случай, когда $Q \in \overline{\Gamma}$. Если $u(x,y) \equiv C_0 = \text{const}$ в D_+, то $u(x,y) \equiv C_0$ на $\overline{D}$. Поскольку $u(x,y) \in C(\overline{D})$ и $u = 0$ на AC, то $C_0 = 0$. Следовательно, это значение достигается всюду на $\overline{D}$, в частности на границе $\overline{\Gamma}$.

Следствие 6. *Пусть выполнены условия теоремы 14. Тогда для любых $(x,y) \in \overline{D}$ справедливы оценки:*

а) $\min\limits_{\overline{\Gamma}} u(x,y) \leqslant u(x,y) \leqslant \max\limits_{\overline{\Gamma}} u(x,y)$,

б) $|u(x,y)| \leqslant \max\limits_{\overline{\Gamma}} |u(x,y)|$.

Следствие 7. *Пусть выполнены условия теоремы 14. Тогда если $u(x,y) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ на Γ, то $u(x,y) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ в $\overline{D}$.*

Доказательство. Пусть существует точка $Q_1 \in D$, такая, что $u(Q_1) < 0$. Тогда $\min\limits_{\overline{D}} u(x,y) = u(Q_0) < 0$. По теореме 14 точка $Q_0 \in \Gamma$, что противоречит условию $u \geqslant 0$ на Γ.

Теорема 15. *Если существует решение задачи (19) – (22), то оно единственно.*

Доказательство следует из принципа экстремума. Пусть существуют два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи (19) – (22). Тогда их разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяет условиям (19), (20) и

$$u(x,y)|_{AC} = u_1(x,y)|_{AC} - u_2(x,y)|_{AC} = \psi(x) - \psi(x) \equiv 0,$$

$$u(x,y)|_{\Gamma} = u_1(x,y)|_{\Gamma} - u_2(x,y)|_{\Gamma} = \varphi(x,y) - \varphi(x,y) \equiv 0.$$

Поскольку для разности $u(x,y)$ выполнены все условия теоремы 14, то $\max\limits_{\overline{D}} u(x,y)$ и $\min\limits_{\overline{D}} u(x,y)$ достигаются на кривой $\overline{\Gamma}$, а там $u(x,y) = 0$. Следовательно, $u(x,y) \equiv 0$ на $\overline{D}$, т. е. $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$.

Теперь рассмотрим линейное уравнение смешанного типа общего вида, т. е. уравнение

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} + Au_x + Bu_y + Cu = F, \tag{30}$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, $K(y), A(x,y), B(x,y), C(x,y), F(x,y)$ – заданные достаточно-гладкие функции, в области D (см. рис. 7), ограниченной простой кривой Жордана Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A = (0,0)$ и $B = (l,0)$, $l > 0$ и характеристиками

$$AC: \xi = x + \int\limits_0^y \sqrt{-K(t)}dt = 0, \quad CB: \eta = x - \int\limits_0^y \sqrt{-K(t)}dt = l,$$

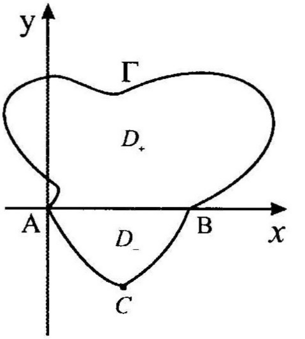

Рис. 7

где $K(y) \in C[y_c, 0] \cap C^2[y_c, 0[$, y_c – ордината точки C уравнения (30), при $y < 0$, и следующую краевую задачу.

Задача Трикоми (Задача T). *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{31}$$

$$Lu(x,y) \equiv F(x,y), \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{32}$$

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma; \tag{33}$$

$$u(x,y) = \psi(x,y), \quad (x,y) \in AC, \tag{34}$$

где φ и ψ – заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(A) = \psi(A)$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

При исследовании задачи T и других аналогичных краевых задач важную роль играет принцип экстремума. Впервые принцип экстремума был сформулирован в 1950 году А.В. Бицадзе [13] для уравнения (30) при $K(y) = \mathrm{sgn} y$, $A = B = C = F \equiv 0$ (см. выше теорему 14). На год позже этот принцип был получен в работе Жермена и Бадера [14] для уравнения Трикоми, т. е. для уравнения (30) при $K(y) = y$, $A = B = C = F \equiv 0$.

В 1952 году в своей диссертации К.И. Бабенко [15] доказал справедливость принципа экстремума для уравнения (30) в некотором классе его обобщенных решений при $K(y) = y$, $A(x, 0) = B(x, 0) = 0$, $F(x, y) \equiv 0$ и достаточно малой длине линии изменения типа уравнения.

В 1953 году в работе Агмона, Ниренберга и Проттера [12] был установлен принцип экстремума для гиперболических уравнений и на его основе принцип экстремума для уравнения (30) при достаточно сильных ограничениях на коэффициенты в области гиперболичности и класс решений.

Дальнейшие исследования в этом направлении велись C.S. Morawetz [16], С.П. Пулькиным [17, 18], В.Ф. Волкодавовым [19 – 21], М.М. Смирновым [21], М.С. Салахитдиновым [22], И.В. Майоровым [23], Т.Д. Джураевым [23], [24] Ю.М. Крикуновым [26], М.Е. Лернером [28], К.Б. Сабитовым [11] и другими математиками. В основном исследования проводились по двум направлениям:

1) установление принципа экстремума для общих уравнений смешанного типа с одной линией изменения типа с целью ослабления тех ограничений, которые возникли в работах К.И. Бабенко и Агмона, Ниренберга и Проттера;

2) установление принципа экстремума для исследования задачи Т и других аналогичных краевых задач для известных модельных уравнений смешанного и смешанно-составного типов

с одной или несколькими линиями изменения типа.

Лемма 1. *Пусть:* 1) *в области* D_+ *коэффициенты уравнения* (30) *ограничены и* $C(x,y) \leqslant 0$; 2) $u(x,y) \in C(\overline{D}_+) \cap \cap C^1(D_+ \cup AB) \cap C^2(D_+)$ *и* $Lu \equiv F \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *в* D_+; 3) $\max\limits_{\overline{D}_+} u(x,y) = u(x_0,0) > 0$ $(\min\limits_{\overline{D}_+} u(x,y) = u(x_0,0) < 0)$, $0 < x_0 < < l$. *Тогда*

$$\lim_{y \to 0+0} u_y(x_0,y) = u_y(x_0,0+0) < 0 \ \ (> 0).$$

Определение 4. Регулярным в области D решением уравнения (30) *назовем функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую условиям* (31) *и* (32), *и, кроме того,* $u_\eta \in C(\Delta \cup A_0C_0)$.

Теорема 16. *Пусть:*

1) *коэффициенты уравнения* (30) *в области* D_+ *ограничены и* $C(x,y) \leqslant 0$;

2) *коэффициенты уравнения* (30) *в области* D_- *в характеристических координатах* (ξ,η) *удовлетворяют условиям теоремы* 12;

3) $F(x,y) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *на* $D_+ \cup D_-$; 4) $u(x,y)$ *регулярное в* D *решение уравнения* (30), *равное нулю на характеристике* AC.

Тогда, если $\max\limits_{\overline{D}} u(x,y) > 0$ $(\min\limits_{\overline{D}} u(x,y) < 0)$, то $\max\limits_{\overline{D}} u$ $(\min\limits_{\overline{D}} u)$ *достигается на кривой* $\overline{\Gamma}$.

Теорема 17. *Пусть:*

1) *коэффициенты уравнения* (30) *в области* D_+ *ограничены и* $C(x,y) \leqslant 0$;

2) *коэффициенты уравнения* (30)*в области* D_- *в характеристических координатах* (ξ,η) *удовлетворяют условиям теоремы* 13;

3) $F(x, y) \equiv 0$; 4) $u(x, y)$ — *регулярное в* D *решение уравнения* (30) *, равное нулю на характеристике* AC.

Тогда, если $\max\limits_{\overline{D}} |u(x, y)| > 0$, *то этот максимум достигается на дуге* $\overline{\Gamma}$.

Следствие 8. а) *Если выполнены условия теоремы* 16 *и* $F(x, y) \equiv 0$, *то для любой точки* $(x, y) \in \overline{D}$ *справедлива оценка*

$$\min_{\overline{\Gamma}} u(x, y) \leqslant u(x, y) \leqslant \max_{\overline{\Gamma}} u(x, y).$$

б) *Если выполнены условия теоремы* 17, *то для любой точки* $(x, y) \in \overline{D}$

$$|u(x, y)| \leqslant \max_{\overline{\Gamma}} |u(x, y)|.$$

в) *Если коэффициенты уравнения* (30) *удовлетворяют условиям теоремы* 16 *или* 17 *и в классе регулярных в* D *решений уравнения* (30) *существует решение задачи* (31) – (34), *то оно единственно.*

Следствие 9. *Пусть:* 1) *коэффициенты уравнения* (30) *удовлетворяют условиям* 1) *и* 2) *теоремы* 16; 2) $F(x, y) \leqslant 0$ $(F(x, y) \geqslant 0)$ *на* $D_+ \cup D_-$; 3) $u(x, y)$ — *регулярное решение уравнения* (30), *равное нулю на* AC. *Тогда*

1) если $u \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *на* $\overline{\Gamma}$, *то* $u \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *в* $\overline{D}$

2) если $u > 0$ (< 0) *на* Γ, *то* $u \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *в* $\overline{D}$ *и* $u > 0$ (< 0) *в* D_+.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сабитов К.Б. *Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения.* – М.: Высшая школа, 2005. – 671 с.

2. Zaremba S. *Sur une probleme toujours possible comprenant, a titre de cas particuliers, le probleme de Dirichlet et de Neumann* // J. Math. Pures Appl. – 1927. – V.6. – P. 127–163.

3. Сабитов К.Б. *Уравнения математической физики.* – М.: Высшая школа, 2003. – 255 с.

4. Олейник О.А. *О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа* //Матем. сб. – 1952. – Т. 30 (72). – №3. – С. 695–702.

5. Hopf E.A. *A remark on linear elliptic differential equations of second order* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – V. 3. – P. 791–793.

6. Giraud G. *Generalisation des problemes sur le operations du type elliptique* // Bull. Math. Soc. France. – 1932. – V. 56. – P. 316–352.

7. Бицадзе А.В. *Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка.* – М.: Наука, 1966. – 203 с.

8. Надирашвили Н.С. *Лемма о внутренней производной и единственность решения 2-й краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка* //Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 261. – № 4. – С. 804–808.

9. Сабитов К.Б., Мукминов Ф.Х. *О знаке производной по конормали в точке максимума решения вырождающихся эллиптических уравнений* // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36. – № 6. – С. 938–942.

10. Nirenberg L. *Astrong maximun principle for parabolic equations* // Comm. Pure and Appl. Math. – 1953. – V. 6. – No 2. – P. 167–177.

11. Сабитов К.Б. *О принципе максимума для уравнений смешанного типа* // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 11. – С. 1967–1976.

12. Agmon S., Nirenberg L., Protter M.H. *A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type* // Comm. Appl. Math.

– 1953.– V. 6. – No 4. – P. 455–470.

13. Бицадзе А.В. *О некоторых задачах смешанного типа* //Докл. АН СССР. – 1950. – Т. 70. – № 4. – С. 561–564.

14. Germain P., Bader R. *Sur le probleme de Tricomi* // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. – 1951. – V. 232. – P. 463–465.

15. Бабенко К.И. *К теории уравнений смешанного типа.* – Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – М., 1952.

16. Morawetz C.S. *Note on a maximum principle and a uniqueness theorem for on elliptic-hyperbolic equation* // Proc. Roy. Soc. – 1956. – V. 236. – No 1204. – P. 141–144.

17. Пулькин С.П. *О единственности решения сингулярной задачи Геллерстедта* // Изв. вузов. Математика. – 1960. – № 6 (19). – С. 214–225.

18. Пулькин С.П. *Исследование по уравнениям смешанного типа.* – Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Казань: КГУ, 1958.

19. Волкодавов В.Ф., Невоструев Л.М. *Принцип локального экстремума для уравнения* $yz_{xx} + z_{yy} + c(x,y)z = 0$ *и его применения* //Волжск. матем. сб. – Куйбышев. – 1966. – Вып. 4. – С. 14–23.

20. Волкодавов В.Ф., Невоструев Л.М. *О принципе локального экстремума для уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу* //Волжск. матем. сб. – Куйбышев. – 1966. – Вып. 5. – С. 70–78.

21. Волкодавов В.Ф. *Принцип локального экстремума и его применение к решению краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными.* – Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Казань: КГУ, 1969.

22. Protter M.H., Wienberger H.F. *Maximum principle in differential equations.* – Prentice-Hall. INC Englewood Cliffs. New-Jersey, 1967. – 261 p.

23. Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа.* – М.: Наука, 1970. – 296 с.

24. Майоров И.В. *О принципе экстремума для одной задачи Франкля* // Сиб. матем. журн. – 1966. – Т. 7. – № 5. – С. 1068–1075.

25. Салахитдинов М.С. *Уравнения смешанно-составного типа.* – Ташкент: Фан, 1974. – 156 с.

26. Крикунов Ю.М. *К задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе* //Изв. вузов. Математика. – 1974. – № 2 (141). – С. 76–81.

27. Джураев Т.Д. *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов.* – Ташкент: Фан, 1979. – 238 с.

28. Лернер М.Е. *Принципы максимума для уравнений гиперболического и смешанного типов в неклассических областях* //Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 287. – № 3. – С. 550–554.